soit (cf. II.3°/)

$$\nu_n = \sum_{p=o}^{n} \sum_{p=o}^{2k+5} C_{2k+5}^{\ell} C_k^p (1)^{n+p+\ell} 2^{\ell} f(2k+5+p-\ell)$$

▶ 5°/ Comme $\nu(X)$ est holomorphe bornée dans $|X| < 1$, elle est en particulier dans l'espace $H^2(D) = \{f$ holomorphe $/ \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ est finie$\}$ et c'est un résultat bien connu (e.g. Agreg 1970)

que $f \in H^2(D) \iff f = \sum_0^{\infty} a_n X^n$ et $\sum_0^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$.

Si $f_{|\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$, tous les $\nu_n \in \mathbb{Z}$ et le raisonnement de II.2°/ montre que ν est un polynôme.

D'autre part, si $\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (e^w - 2)^{2k+5} F(w) e^{wz} dw$

soit

$$\tilde{f}(z) = \left(\sum_{\ell=o}^{2k+5} (-1)^{\ell} 2^{-\ell} f(\ell + z) C_{2k+5}^{\ell}\right) (-2)^{2k+5}$$

ce qui prouve que

$$\nu(X) = \sum_{o}^{m_o} \alpha_n(\tilde{f}) X^n$$

où

$$\alpha_n(\tilde{f}) = (-1)^n \sum_{o}^{n} (-1)^k C_n^k \tilde{f}(k).$$

et $\alpha_n(\tilde{f}) = 0$ si $n > m_o$. On en déduit donc

$$\forall_n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \quad \tilde{f}(n) = \sum_{o}^{n_o} C_n^k \alpha_k(\tilde{f})$$

et si $\tilde{P}_1$ est tel que $\alpha_k(\tilde{f}) = \alpha_k(\tilde{P}_1)$, $k < n_o$ on en déduit qu'il existe un polynôme P_1 tel que pour tout $n \geqslant n_o$

$$\sum_{o}^{2k+5} (-1)^{\ell} 2^{-\ell} C_{2k+5}^{\ell} f(n+\ell) = \sum_{o}^{2k+5} (-1)^{\ell} 2^{-\ell} C_{2k+5}^{\ell} P_1(n+\ell)$$

et en utilisant II 2°/, on obtient l'égalité pour tout $z \in \mathbb{C}$ remplaçant n. D'où l'égalité $f = 2^z P_o + P$ où P_1 est un polynôme.

Année 1970

CLASSES DE HARDY. CALCUL SYMBOLIQUE DANS DES ESPACES DE HILBERT

ÉNONCÉ

Il est conseillé aux candidats de rédiger de façon précise, sans longueur inutile, les questions qu'ils traiteront, en en présentant toutefois une solution complète. Ils doivent suivre les notations de l'énoncé. Ils doivent également faire figurer au début de chaque question traitée le numéro correspondant de l'énoncé.

NOTATIONS :

Durant tout le problème, les notations suivantes seront utilisées :

— **R** est le corps des nombres réels; si $a, b \in \mathbf{R}$, on note :
$[a, b] = \{ t \in \mathbf{R};\ a \leqslant t \leqslant b \}$, $[a, b[= \{ t \in \mathbf{R};\ a \leqslant t < b \}$
$[a, +\infty[= \{ t \in \mathbf{R},\ t \geqslant a \}$.

— **C** est le corps des nombres complexes; pour $z \in \mathbf{C}$, Re z et Im z sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z, $\bar{z}$ est le conjugué de z, $|z|$ le module de z.

— On utilisera librement l'identification du groupe additif de **C** au groupe additif de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ ($z = x + iy$), ainsi que l'identification de **R** à un sous-corps de **C**.

— $D = \{ z \in \mathbf{C};\ |z| < 1 \}$ et $\overline{D} = \{ z \in \mathbf{C};\ |z| \leqslant 1 \}$.

— Le mot fonction désignera, dans tout l'énoncé, une application à valeurs dans **C**.

— Si g est une fonction continue définie sur D et si $p \in [1, \infty[$, on pose :

$$M_p(g, r) = \left(\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad r \in [0, 1[$$

$$M_p^*(g) = \sup_{r \in [0, 1[} M_p(g, r).$$

— H est l'algèbre des fonctions définies et holomorphes sur D; H_c est l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{D}$, dont la restriction à D est holomorphe.

— $H^p = \{f \in H \ ; \ M_p^*(f) < \infty\}$ où $p \in [1, \infty[$; si $f \in H^p$, on pose :

$$\| f \|_{H^p} = M_p^*(f)$$

— $H^\infty = \{f \in H \ ; \ \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty\}$; on pose, si $f \in H^\infty$:

$$\| f \|_{H^\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

— On rappelle qu'une fonction h, définie sur D, est *harmonique* sur D si $h(x, y)$ est deux fois continuement dérivable et vérifie :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad (z = x + iy)$$

— A est l'espace vectoriel des fonctions harmoniques sur D.

— A_c est l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\overline{D}$ dont la restriction à D est harmonique.

— $A^p = \{h \in A \ ; \ M_p^*(h) < \infty\}$, où $p \in [1, +\infty[$; si $h \in A^p$, on pose :

$$\| h \|_{A^p} = M_p^*(h).$$

***

La théorie de l'intégrale de Lebesgue pourra être utilisée librement dans tout le problème. Son utilisation n'est toutefois indispensable que pour certaines questions de la partie II.

Les différentes parties du problème sont de difficulté comparable et peuvent être abordées dans un ordre quelconque, les résultats antérieurs nécessaires étant explicitement donnés dans l'énoncé.

La première partie utilise principalement la théorie des fonctions holomorphes; la seconde, l'intégrale de Lebesgue et certaines intégrales de Radon; la troisième partie, les espaces de Hilbert. Les deux dernières parties nécessitent moins de calculs élémentaires que la première.

I

On se propose ici d'établir certaines formules de représentation intégrale de fonctions holomorphes ou harmoniques sur D et d'en déduire quelques conséquences.

1° A partir des équations de Cauchy-Riemann, démontrer l'inclusion :

$$H \subset A.$$

Si $u \in A$ et si u est à valeurs réelles, prouver l'existence d'une fonction v, à valeurs réelles, unique, telle que :

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad (u + iv) \in H.$$

En déduire que, si f est une application holomorphe de D dans D, alors

$h \in A$ entraîne $h \circ f \in A$. ($h \circ f$ note la composée de f par h)

2° Déduire de la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes l'égalité :

$$g(0) = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \qquad \text{si} \quad g \in A_c.$$

(On pourra établir cette formule en supposant, d'abord, g à valeurs réelles.)

Prouver que pour tout $a \in D$ et tout $h \in A_c$, on a :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} h(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\varphi - \theta)\, h(e^{i\theta})\, d\theta \\ \text{avec} \quad a = re^{i\varphi}, \quad |a| = r \quad \text{et} \\ P_r(\psi) = \dfrac{1 - r^2}{2\pi(1 - 2r\cos\psi + r^2)}, \qquad r \in [0, 1[, \quad \psi \in \mathbf{R}. \end{array} \right.$$

(Pour démontrer (1), on pourra considérer $g = h \circ f_a$ où

$$f_a(z) = \frac{a - z}{1 - z\bar{a}}\Big)$$

Appliquant (1) à $h(z) = z^p$, p entier positif ou nul, calculer les coefficients de Fourier de la fonction de ψ définie, pour r fixé, par $P_r(\psi)$. En conclure :

$$2\pi P_r(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\psi}$$

3° Trouver une fonction $k \in H$ telle que :

$\mathrm{Re}(k(z)) = P_r(\psi)$, où $z = re^{i\psi}$, et telle que $k(0)$ soit réel. (On pourra déterminer k par les coefficients de son développement taylorien.)

En déduire :

$$(2)\quad \begin{cases} f(a) - i\,\mathrm{Im}(f(0)) = \displaystyle\int_0^{2\pi} Q_r(\varphi - \theta)\, u(\theta)\, d\theta \quad \text{pour tout } f \in H_c \\ \text{avec} \quad u(\theta) = \mathrm{Re}(f(e^{i\theta})) \ , \quad a = re^{i\varphi} \ , \quad |a| = r \quad \text{et} \\ 2\pi Q_r(\psi) = \dfrac{1+z}{1-z} \quad \text{avec} \quad z = re^{i\psi} \ , \quad |z| = r \ , \quad r \in [0\ ,\ 1[. \end{cases}$$

4° Pour tout $a \in D$, on pose :

$$B_a(z) = \frac{|a|}{a}\,\frac{a - z}{1 - z\bar{a}} \qquad \text{si} \quad a \neq 0$$

et

$$B_a(z) = z \qquad \text{si } a = 0$$

On remarquera : $|B_a(z)| = 1$ si $|z| = 1$ et $|B_a(z)| < 1$ pour $z \in D$.

Soit Λ un ensemble de points de D et soit m une application définie sur Λ à valeurs dans l'ensemble N^* des entiers strictement positifs. Lorsque Λ est *fini*, on considérera le produit :

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda(z))^{m(\lambda)}$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la fonction $m(\lambda)$, on convient de noter ce produit par : $B_\Lambda(z)$.

Soit $f \in H$, $f \neq 0$; on note Λ_f l'ensemble des zéros de f, la fonction $m(\lambda)$ étant l'ordre de multiplicité du zéro λ. On introduit les parties finies de Λ_f suivantes :

$$\Lambda_{f,r} = \Lambda_f \cap \{z \in D \ ;\ |z| < r\} \quad \text{où} \quad r \in [0\ ,\ 1[$$

Montrer que :

$$(3)\quad \begin{cases} f(z) = \alpha B_{\Lambda_f}(z) \exp\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} Q_r(\varphi - \theta) \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta\right) \\ \text{pour tout} \quad f \in H_c \quad \text{vérifiant} \quad f(z) \neq 0 \quad \text{si} \quad |z| = 1\ , \\ \text{et } \alpha \text{ dénotant une constante de module 1.} \end{cases}$$

(Pour démontrer (3), on pourra d'abord montrer que les hypothèses sur f entraînent que Λ_f est fini; puis on considérera $f B_{\Lambda_f}^{-1}$.)

Démontrer que

$$(4)\quad \begin{cases} \text{pour tout} \quad f \in H \quad \text{tel que} \quad f(0) \neq 0, \text{ on a :} \\ \log|f(0)| + \displaystyle\int_0^r n_f(t)\frac{dt}{t} = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,\frac{d\theta}{2\pi} \qquad \text{où} \\ r \in [0\ ,\ 1[\quad , \quad n_f(t) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda_{f,t}} m(\lambda) \end{cases}$$

(On pourra d'abord appliquer la formule (3) à $g(z) = f(r_0 z)$ où r_0 est fixé, ($r_0 \in [0,1[$), de telle sorte que g satisfasse aux hypothèses de (3); puis, ayant ainsi établi (4) pour certaines valeurs de r, on conclura dans le cas général.)

5° On pose :

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in H \ ;\ \sup_{r \in [0\ ,1[} \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty \right\}$$

(où $\log^+ t = \mathrm{Sup}(\log t\ ,\ 0)$ $\quad t$ réel positif ou nul).

Prouver l'inclusion :

$$H^1 \subset \mathcal{N}$$

Déduire de (4) que si $f \in H$, $f(0) \neq 0$, alors $f \in \mathcal{N}$ si et seulement si :

$$\sup_{r \in [0,1[} \int_0^{2\pi} \left| \log|f(re^{i\theta})| \right| d\theta < \infty.$$

Soit $f \in \mathcal{N}$, $f(0) \neq 0$; montrer alors :

$$(5)\qquad \int_0^1 n_f(t)\frac{dt}{t} < \infty$$

6° Montrer que, pour $f \in \mathcal{N}$ (f n'étant pas identiquement nulle), le produit infini suivant est convergent :

$$B_{\Lambda_f}(z) = \lim_{r \to 1} B_{\Lambda_{f,r}}(z) \qquad (z \in D)$$

Prouver que $B_{\Lambda_f} \in H^\infty$.

(On pourra établir qu'à tout compact K de D on peut associer une constante C telle qu'on ait :

$$|B_a(z) - 1| < C(1 - |a|)$$

quels que soient $a \in D$, $z \in K$.)

En appliquant (4) à la fonction B_{Λ_f}, montrer :

$$(6)\qquad \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \left| \log|B_{\Lambda_f}(re^{i\theta})| \right| d\theta = 0\ ,$$

et démontrer alors que tout $f \in \mathcal{N}$, non identiquement nulle, s'écrit :

(6') $\quad f = f_1 B_{\Lambda_f}$ avec $f_1 \in \mathcal{N}$ et $f_1(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$.

7° Soit $f \in H$. Montrer que :

$$\text{si} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\ , \quad \text{alors} \quad M_2(f\ ,\ r) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En déduire que :

$M_2(f, r)$ *est une fonction croissante de* r.

En particulier, si $f \in H^2$, démontrer que :

$$\|f\|_{H^2} = \lim_{r \to 1} M_2(f, r) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

8° On se propose de démontrer que toute fonction f non identiquement nulle appartenant à H^2 peut s'écrire :

(7) $\quad f = g\,B_{\Lambda_f}$ avec $g \in H^2$, $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$.

(On pourra considérer $g_r = (B_{\Lambda_f, r})^{-1} f$, on montrera que

$$\|g_r\|_{H^2} = \|f\|_{H^2}$$

et on conclura soit par un calcul direct, soit en utilisant un argument de compacité sur les g_r.)

II

On se propose dans cette partie :

— *de généraliser la formule de représentation intégrale* (1) *de* A_c *à* A^1;

— *de préciser la formule* (7).

On note :

— $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, continues, de période 2π.

— L^p, où $p \in [1, \infty[$, l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0, 2\pi]$, de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable; si $u \in L^p$, on pose :

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^p \frac{dx}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}$$

— $\mathfrak{M}$ l'espace vectoriel des mesures de Radon sur $[0, 2\pi[$, de masse totale finie.

On rappelle qu'une suite $d\nu_n$ d'éléments de $\mathfrak{M}$ *converge vaguement* vers $d\nu \in \mathfrak{M}$ si, pour tout $k \in \mathscr{C}$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} k\, d\nu_n = \int_0^{2\pi} k\, d\nu$$

1° Soit $v \in \mathscr{C}$, posons :

$$v_r(\varphi) = \int_0^{2\pi} P_r(\varphi - \theta)\, v(\theta)\, d\theta.$$

Montrer que v_r converge uniformément vers v lorsque r tend vers 1.

Soit $d\mu \in \mathfrak{M}$; considérons :

$$h(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_r(\varphi - \theta)\, d\mu(\theta).$$

Montrer que les mesures $d\sigma_r \in \mathfrak{M}$ définies en posant :

(8) $\quad d\sigma_r = h(re^{i\varphi})\, d\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$

convergent vaguement vers $d\mu$, lorsque r tend vers 1.

En déduire que $h = 0$ implique $d\mu = 0$.

Montrer que $h \in A^1$ et que :

$$\|h\|_{A^1} \leqslant \int_0^{2\pi} |d\mu|$$

2° Réciproquement, soit $u \in A^1$; posons :

$$d\gamma_r = u(re^{i\theta})\, d\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi[$$

Montrer que l'on peut extraire de la famille $d\gamma_r$ une suite $d\gamma_{r_k}$ convergeant vaguement vers une mesure $d\nu \in \mathfrak{M}$. Montrer que l'on a :

(9) $\quad u(z) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \psi)\, d\nu(\psi) \qquad z = re^{i\theta} \qquad r = |z|$

En déduire que :

(10) $\left\{\right.$ si $h \in A^1$, alors, lorsque r tend vers 1, les mesures de Radon $d\gamma_r$ convergent vaguement vers une mesure de Radon $d\nu \in \mathfrak{M}$ vérifiant (9).

Peut-on caractériser la classe A^1 comme étant les fonctions s'écrivant sous la forme (9) ?

Montrer que :

$$\|h\|_{A^1} = \int_0^{2\pi} |d\nu|$$

3° Déduire de II, 2° et de I, 5° et 6° que si $f \in \mathfrak{N}$, alors il existe $d\rho \in \mathfrak{M}$ unique telle que :

$$f(z) = \alpha B_{\Lambda_f}(z) \exp\left(\int_0^{2\pi} Q_r(\varphi - \theta)\, d\rho(\theta)\right)$$

où α est une constante de module 1 et où $z = re^{i\varphi}$, $|z| = r$.

En déduire que $f \in \mathfrak{N}$ si, et seulement si, il existe $f_1, f_2 \in H^\infty$ telles que :

$$f = \frac{f_1}{f_2}$$

ce quotient devant de plus être holomorphe.

4° Soit u_r une famille de fonctions à valeurs réelles positives ou nulles, dépendant du paramètre r, $r \in [0, 1[$, telles que $u_r \in L^2$.

On suppose l'existence d'une fonction $u^* \in L^2$ telle que .

$$\lim_{r \to 1} \| u_r - u^* \|_{L^2} = 0$$

et on suppose

$$\left(\log u_r(\varphi)\right) d\varphi = d\chi_r \in \mathfrak{M}$$

On suppose enfin que les mesures de Radon $d\chi_r$ convergent vaguement vers une mesure $d\chi$. Montrer alors que :
$d\chi = (\log u^*)\, d\theta + d\mu$, où $d\mu$ est une mesure négative.
(On pourra d'abord prouver que $(\log u^*) \in L^1$.)

5° Soit $f \in H^2$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

Considérons la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$

Remarquer que cette série converge dans L^2 vers une fonction f^*.

Ainsi, à toute fonction $f \in H^2$, on associe $f^* \in L^2$; montrer que f^* est caractérisée par :

(11) $$\lim_{r \to 1} \| f^* - f_r \|_{L^2} = 0 \qquad \text{où} \qquad f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$$

Démontrer :

(12)
Toute fonction $f \in H^2$ non identiquement nulle s'écrit sous la forme $f = EI$ où :

$$E(z) = \exp\left(\int_0^{2\pi} Q_r(\varphi - \theta) \log |f^*(\theta)|\, d\theta \right), \quad z = re^{i\varphi},\ |z| = r$$

f^* ayant été définie en (11), et où :

$$I(z) = \alpha B_{\Lambda_f}(z) \exp\left(\int_0^{2\pi} Q_r(\varphi - \theta)\, d\mu(\theta) \right)$$

où $d\mu$ est une mesure de Radon négative et où α est une constante de module 1, α et $d\mu$ étant uniquement déterminés par f.

Remarquer que l'on a $I \in H^\infty$; en déduire l'existence de I^* définie par (11).

Extrayant une suite convenable r_k tendant vers 1, montrer que presque partout en θ on a :

$$\lim_{k \to \infty} |E(r_k e^{i\theta})| = |f^*(\theta)|$$

(On pourra d'abord montrer que $\log |E(re^{i\theta})|$ converge dans L^1 vers $\log |f^*(\theta)|$).

En déduire que :

(13) $$|I^*(\theta)| = 1 \text{ presque partout.}$$

6° En gardant les notations de la question précédente, montrer que : si $f = f_1 f_2$ où f, f_1 et $f_2 \in H^2$, et si $f_j = E_j I_j$, $j = 1, 2$ on aura : $E = E_1 E_2 \qquad I = I_1 I_2$.

Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des fonctions de H^∞ vérifiant (13).

Prouver que :

$f_1, f_2 \in \mathfrak{J}$ entraîne $f_1 f_2 \in \mathfrak{J}$.

Soient $f = EI$ un élément de H^2 et $f_3 \in \mathfrak{J}$. On dit que f_3 *divise* f s'il existe $f_4 \in H^2$ telle que $f = f_3 f_4$.

Montrer que f_3 divise f si et seulement si f_3 *divise* I *dans* $\mathfrak{J}$, c'est-à-dire si :

$$I = f_3 f_5 \qquad \text{avec} \quad f_5 \in \mathfrak{J}$$

III

On se propose d'appliquer les résultats de II 5° *et* 6° *à l'étude de certains opérateurs d'un espace de Hilbert.*

1° Montrer que H^2 s'identifie par l'application $f \longmapsto f^*$, définie en (11), à un sous-espace vectoriel fermé de L^2. En déduire que H^2 est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant défini par :

$$(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f^*(\theta)\, \overline{g^*(\theta)}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, \overline{g(re^{i\theta})}\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

Soit $u \in H^\infty$. Prouver que l'application :

$$T_u : f \longmapsto uf$$

est une application linéaire bornée de H^2 dans lui-même.

Si $u \in \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ ayant été défini en II 6°, montrer que T_u est isométrique, c'est-à-dire que :

$$\|T_u f\|_{H^2} = \| f \|_{H^2} ;$$

en conclure que, dans ce cas, l'image de T_u est un sous-espace fermé de H^2.